積分不等式方法應用於區間延遲類神經網路之指數穩定度研究

楊明憲 [1]

[1] 建國科技大學電機工程系

E-mail:yms@ctu.edu.tw

摘要

本文旨在研究區間延遲類神經網路之強健指數收斂率估測問題。藉由分段延遲積分方法、具有三重積分項目之特殊型李亞普諾-克羅斯威斯基泛函數概念及積分不等式技巧，針對上述類神經網路，提出新時延導數相關的強健指數穩定測試準則。本文之主要特點是所提出之準則表示為線性矩陣不等式形式，可便於用 MATLAB 軟體工具求解。舉例證實本研究方法明顯改善現有文獻之結果。

關鍵字： 區間延遲類神經網路，分段延遲積分方法，積分不等式，時延導數相關準則。

1. 前言

過去幾年來,類神經網路有效地運用於訊號處理、移動影像處理、圖樣辨識、關聯記憶系統、移動物體的速度偵測及求解非線性代數方程式等問題。另一方面，延遲現象普遍存在於類神經網路系統，而此現象是由元件特性所致，且造成系統不穩定的主要因素之一。因而，近年來，許多學者以不同方法推導出延遲類神經網路之穩定度測試條件。最近，由於智慧型控制技術快速發展，切換型延遲類神經網路之穩定度測試問題也逐漸受到關注的焦點。然而，針對上述類神經網路，其穩定結果仍是較保守的。因此，本文之研究動機源自於此。

考慮區間延遲切換類神經網路系統的數學式如下

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{N} S_i(t)\{-x(t)+[A_i+\Delta A_i(t)]f(x(t)) +[B_i+\Delta B_i(t)]f(x(t-d(t)))\} \quad (1)$$

其中 $x(t)=[x_1(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}\in R^n$ ， $f(x(t))=[f_1(x_1(t)),\cdots,f_n(x_n(t))]^{\mathrm{T}}\in R^n$ 分別表示神經元的狀態向量及激發函數； A_i 及 B_i 分別表示具有適當維度之第 i 個模式的已知互連量化及延遲互連量化矩陣。$d(t)$ 表示區間時變時間延遲項且滿足 $0\le d_m\le d(t)\le d_M$ 及 $\dot{d}(t)\le\rho<1$。 $S_i(t)$ 是切換函數且滿足下列條件

$$\sum_{i=1}^{N} S_i(t)=1 \quad (2a)$$

$$S_i(t)=\begin{cases}1, & \text{當網路系統操作於第 } i \text{ 個模式}\\ 0, & \text{當其他情況}\end{cases} \quad (2b)$$

假設一

對於 x_1，$x_2\in R$，且存在常數 $C_j>0$，則 $f_j(x_j(t))$ 滿足下列條件

$$\left|f_j(x_1)-f_j(x_2)\right|\le C_j\left|x_1-x_2\right| \quad (3)$$

假設二

不定性參數矩陣 $\Delta A_i(t)$ 及 $\Delta B_i(t)$ 是具有下列特性

$$[\Delta A_i(t)\ \Delta B_i(t)]=DF(t)[E_i^A\ E_i^B] \quad (4)$$

其中 D，E_i^A 及 E_i^B 是具有適當維度之已知實數矩陣。$F(t)$ 是未知時變矩陣且滿足下列條件

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\le I\ ,\quad t\ge 0 \quad (5)$$

補助定理一[1]

令 r_1，$r_2\in R^n$，$D\in R^{n\times n_f}$，$E\in R^{n_f\times n}$，$F\in R^{n_f\times n_f}$ 及 $H\in R^{n\times n}$ 為對稱正定矩陣，且 $F^{\mathrm{T}}F\le I$ 及 $\mu>0$，則下列不等式成立

(i) $2r_1^{\mathrm{T}}r_2\le r_1^{\mathrm{T}}H^{-1}r_1+r_2^{\mathrm{T}}Hr_2$ (6a)

(ii) $DFE+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\le\mu^{-1}DD^{\mathrm{T}}+\mu E^{\mathrm{T}}E$ (6b)

補助定理二[2]

假設 $u(s)\in R^{n_u}$，$v(s)\in R^{n_v}$ 及 $G\in R^{n_u\times n_v}$ 均定義於區間 Π 內。若存在任意矩陣 $\Lambda_1\in R^{n_u\times n_u}$，$\Lambda_2\in R^{n_u\times n_v}$ 及 $\Lambda_3\in R^{n_v\times n_v}$，則下列不等式成立

$$-2\int_{\Pi}u^{\mathrm{T}}(s)Gv(s)ds \le\int_{\Pi}\begin{bmatrix}u(s)\\ v(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_2-G^{\mathrm{T}}\\ \Lambda_2^{\mathrm{T}}-G & \Lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(s)\\ v(s)\end{bmatrix}ds \quad (7)$$

其中

$$\begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_2\\ \Lambda_2^{\mathrm{T}} & \Lambda_3\end{bmatrix}\ge 0$$

補助定理三[3]

對於任意對稱正定矩陣 Ω 及正純量 τ，則下列不等式成立

$$-\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\varpi^{\mathrm{T}}(s)\Omega\varpi(s)dsd\theta \le -\frac{2}{\tau^2}\left(\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\varpi(s)dsd\theta\right)^{\mathrm{T}} \times\Omega\left(\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\varpi(s)dsd\theta\right) \quad (8)$$

2. 主要結果

定理一

若存在對稱正定矩陣 P_1，Q_1，Q_2，R_1，R_2，R_3，S_1，S_2，W_1，W_2，實數矩陣 J，M_1，M_2，N_1，N_2，N_3，P_2，P_3 及正純量 $0<\alpha<1$，β_1，β_2，β_3，β_4 使得下列矩陣不等式成立

$$\begin{bmatrix} S_1 & J \\ J^{\mathrm{T}} & S_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (9a)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \Gamma_2^{\mathrm{T}} & \Gamma_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (9b)$$

$$W_1 \le \beta_1 I,\ W_2 \le \beta_2 I,\ C = diag(C_1,\cdots,C_n) \quad (9c)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & M_1 & M_2 \\ M_1^{\mathrm{T}} & N_1 & N_2 \\ M_2^{\mathrm{T}} & N_2^{\mathrm{T}} & N_3 \end{bmatrix} \ge 0 \quad (9d)$$

則區間延遲切換類神經網路系統(1)式為具有收斂率 δ 之指數穩定，其中

$$\Gamma_1=\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & -M_1^{\mathrm{T}}-(1-\rho)J & \frac{1}{\alpha d_M}R_3 & 0 & \frac{2}{d_M}R_2+S_2 \\ \Gamma_{12}^{\mathrm{T}} & \Gamma_{22} & -M_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & J \\ -M_1-(1-\rho)J & -M_2 & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha d_M}R_3 & 0 & 0 & \Gamma_{44} & \frac{1}{d_M-d_m}R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d_M-d_m}R_1 & \Gamma_{55} & 0 \\ \frac{2}{d_M}R_2+S_2 & J & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{d_M^2}R_2 \end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$\Gamma_2=\begin{bmatrix} \frac{2}{d_M}R_2 & P_2^{\mathrm{T}}A_i & P_2^{\mathrm{T}}B_i & P_2^{\mathrm{T}}D & P_2^{\mathrm{T}}D & 0 \\ 0 & P_3^{\mathrm{T}}A_i & P_3^{\mathrm{T}}B_i & P_3^{\mathrm{T}}D & P_3^{\mathrm{T}}D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 e^{\delta d_M}C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{d_M^2}R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10b)$$

$$\Gamma_3=\begin{bmatrix} -\frac{2}{d_M^2}R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -W_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_3 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_4 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 I \end{bmatrix} \quad (10c)$$

$$\Gamma_{11}=(\delta-1)P_2^{\mathrm{T}}+(\delta-1)P_2+M_1+M_1^{\mathrm{T}}+Q_1+Q_2+Q_3+2J +\{\beta_1+\beta_3\lambda_{\max}[(E_i^A)^{\mathrm{T}}E_i^A]\}C^2+d_M N_1-2R_2-\frac{1}{\alpha d_M}R_3 \quad (10d)$$

$$\Gamma_{12}=P_1-P_2^{\mathrm{T}}+(\delta-1)P_3+M_2+d_M N_2+S_1 \quad (10e)$$

$$\Gamma_{22}=-P_3-P_3^{\mathrm{T}}+d_M(N_3+R_1+\alpha R_3)+\frac{1}{2}d_M^2 R_2 \quad (10f)$$

$$\Gamma_{33}=-(1-\rho)Q_1+\beta_4\lambda_{\max}[(E_i^B)^{\mathrm{T}}E_i^B]CC-\frac{1}{d_M-d_m}R_1 \quad (10g)$$

$$\Gamma_{44}=-Q_3-\frac{1}{\alpha d_M}R_3 \quad (10h)$$

$$\Gamma_{55}=-Q_2-\frac{1}{d_M-d_m}R_1 \quad (10i)$$

證明

令 $y(t)=e^{\delta t}x(t)$，其中 $\delta>0$；再根據(1)式，可得

$$\dot{y}(t)=\delta e^{\delta t}x(t)+e^{\delta t}\dot{x}(t) =\sum_{i=1}^{N}S_i(t)\{(\delta-1)y(t)+[A_i+\Delta A_i(t)]\Omega(y(t)) +[B_i+\Delta B_i(t)]\Omega(y(t-d(t)))\} \quad (11)$$

其中 $y(t)=[y_1(t),\cdots,y_n(t)]^{\mathrm{T}}$，$\Omega(y(t))=[\Omega_1(y_1(t)),\cdots,\Omega_n(y_n(t))]^{\mathrm{T}}$，$\Omega(y(t-d(t)))=[\Omega_1(y_1(t-d(t))),\cdots,\Omega_n(y_n(t-d(t)))]^{\mathrm{T}}$。$\Omega_j(y_j(t))=e^{\delta t}f_j(x_j(t))$ 及 $\Omega_j(y_j(t-d(t)))=e^{\delta t}f_j(x_j(t-d(t)))$ 分別滿足下列條件

$$|\Omega_j(y_j(t))| \le C_j|y_j(t)| \quad (12a)$$

$$|\Omega_j(y_j(t-d(t)))| \le C_j e^{\delta d_M}|y_j(t-d(t))| \quad (12b)$$

藉由奇異模型轉換[4]，系統(11)式變成如下

$$\dot{y}(t)=w(t) \quad (13a)$$

$$0=-w(t)+\sum_{i=1}^{N}S_i(t)\{(\delta-1)y(t)+[A_i+\Delta A_i(t)]\Omega(y(t)) +[B_i+\Delta B_i(t)]\Omega(y(t-d(t)))\} \quad (13b)$$

引用 Leibniz-Newton 公式及 $\sum_{i=1}^{N} S_i(t)=1$ ，則系統(13)式可改寫如下

$$\dot{y}(t)=w(t) \tag{14a}$$

$$\begin{aligned}0=\sum_{i=1}^{N} S_i(t)\{&-w(t)+[K+(\delta-1)I]y(t)\\&-Ky(t-d(t))+[A_i+\Delta A_i(t)]\Omega(y(t))\\&+[B_i+\Delta B_i(t)]\Omega(y(t-d(t)))\\&-K\int_{t-d(t)}^{t} w(s)ds\}\end{aligned} \tag{14b}$$

其中 K 是具有適當維度之實數矩陣。

選取 Lyapunov-Krasovskii 泛函數如下

$$\begin{aligned}V(t)=&\chi^{\mathrm T}(t)EP\chi(t)+\int_{t-d(t)}^{t} y^{\mathrm T}(\theta)Q_1 y(\theta)d\theta\\&+\int_{t-d_M}^{t} y^{\mathrm T}(\theta)Q_2 y(\theta)d\theta+\int_{t-\alpha d_M}^{t} y^{\mathrm T}(\theta)Q_3 y(\theta)d\theta\\&+\begin{bmatrix} y(t)\\ \int_{t-d(t)}^{t} y(s)ds\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix} S_1 & J\\ J^{\mathrm T} & S_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t)\\ \int_{t-d(t)}^{t} y(s)ds\end{bmatrix}\\&+\int_{-d_M}^{0}\int_{t+\theta}^{t} w^{\mathrm T}(s)R_1 w(s)dsd\theta\\&+\int_{-d_M}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\alpha}^{t} d_M^2 w^{\mathrm T}(s)R_2 w(s)dsd\alpha d\theta\\&+\int_{-\alpha d_M}^{0}\int_{t+\theta}^{t} w^{\mathrm T}(s)R_3 w(s)dsd\theta\end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$\chi^{\mathrm T}(t)=[y^{\mathrm T}(t)\ w^{\mathrm T}(t)],\ E=\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix} P_1 & 0\\ P_2 & P_3\end{bmatrix} \tag{16}$$

由於(15)式的右邊第一項對時間微分，可寫成如下

$$\frac{d}{dt}[\chi^{\mathrm T}(t)EP\chi(t)]=2y^{\mathrm T}(t)P_1\dot{y}(t)=2\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\dot{y}(t)\\ 0\end{bmatrix} \tag{17}$$

因此，(15)式沿系統(14)式的軌跡並對時間微分可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&2\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\\&\times\begin{bmatrix} w(t)\\ \left(\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} S_i(t)\{&-w(t)+[K+(\delta-1)I]y(t)\\&-Ky(t-d(t))\\&+[A_i+\Delta A_i(t)]\Omega(y(t))\\&+[B_i+\Delta B_i(t)]\Omega(y(t-d(t)))\\&-K\int_{t-d(t)}^{t} w(s)ds\}\end{aligned}\right)\end{bmatrix}\\&+y^{\mathrm T}(t)Q_1 y(t)-(1-\dot{d}(t))y^{\mathrm T}(t-d(t))Q_1 y(t-d(t))\\&+y^{\mathrm T}(t)Q_2 y(t)-y^{\mathrm T}(t-d_M)Q_2 y(t-d_M)\\&+y^{\mathrm T}(t)Q_3 y(t)-y^{\mathrm T}(t-\alpha d_M)Q_3 y(t-\alpha d_M)\\&+2\begin{bmatrix} y(t)\\ \int_{t-d(t)}^{t} y(s)ds\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix} S_1 & J\\ J^{\mathrm T} & S_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(t)\\ y(t)-(1-\dot{d}(t))y(t-d(t))\end{bmatrix}\\&+d_M w^{\mathrm T}(t)(R_1+\alpha R_3)w(t)-\int_{t-d(t)}^{t} w^{\mathrm T}(s)R_1 w(s)ds\\&-\int_{t-d_M}^{t-d(t)} w^{\mathrm T}(s)R_1 w(s)ds+\frac{1}{2}d_M^2 w^{\mathrm T}(t)R_2 w(t)\\&-\int_{-d_M}^{0}\int_{t+\theta}^{t} w^{\mathrm T}(s)R_2 w(s)dsd\theta-\int_{t-\alpha d_M}^{t} w^{\mathrm T}(s)R_3 w(s)ds\end{aligned} \tag{18}$$

引用補助定理一，並藉由(9c)式及(12)式，可得

$$\begin{aligned}&2\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ A_i\end{bmatrix}\Omega(y(t))\\&\le\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ A_i\end{bmatrix}W_1^{-1}[0\ A_i^{\mathrm T}]P\chi(t)\\&\quad+\beta_1 y^{\mathrm T}(t)CCy(t)\end{aligned} \tag{19a}$$

$$\begin{aligned}&2\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ B_i\end{bmatrix}\Omega(y(t-d(t)))\\&\le\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ B_i\end{bmatrix}W_2^{-1}[0\ B_i^{\mathrm T}]P\chi(t)\\&\quad+\beta_2 e^{2\delta d_M}y^{\mathrm T}(t-d(t))CCy(t-d(t))\end{aligned} \tag{19b}$$

根據(4)式及(5)式，並再引用補助定理一及(12)式，可得

$$\begin{aligned}&2\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ \Delta A_i(t)\end{bmatrix}\Omega(y(t))\\&=2\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ D\end{bmatrix}F(t)E_i^{A}\Omega(y(t))\\&\le\beta_3^{-1}\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ D\end{bmatrix}[0\ D^{\mathrm T}]P\chi(t)\\&\quad+\beta_3\lambda_M[(E_i^A)^{\mathrm T}E_i^A]y^{\mathrm T}(t)CCy(t)\end{aligned} \tag{20a}$$

$$\begin{aligned}&2\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ \Delta B_i(t)\end{bmatrix}\Omega(y(t-d(t)))\\&=2\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ D\end{bmatrix}F(t)E_i^{B}\Omega(y(t-d(t)))\\&\le\beta_4^{-1}\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ D\end{bmatrix}[0\ D^{\mathrm T}]P\chi(t)\\&\quad+\beta_4\lambda_M[(E_i^B)^{\mathrm T}E_i^B]y^{\mathrm T}(t-d(t))CCy(t-d(t))\end{aligned} \tag{20b}$$

其中 $\lambda_M[(E_i^A)^{\mathrm T}E_i^A]$ 是 $(E_i^A)^{\mathrm T}E_i^A$ 的最大特徵值， $\lambda_M[(E_i^B)^{\mathrm T}E_i^B]$ 是 $(E_i^B)^{\mathrm T}E_i^B$ 的最大特徵值。

應用補助定理二，則(9d)式成立且可得

$$-\int_{t-d(t)}^{t} 2\chi^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ K\end{bmatrix}w(s)ds$$

$$
\le \int_{t-d(t)}^{t} [w^{\mathrm{T}}(s) \quad \chi^{\mathrm{T}}(t)] \times \begin{bmatrix} R_1 & M-[0 \quad K^{\mathrm{T}}]P \\ M^{\mathrm{T}} - P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ \chi(t) \end{bmatrix} ds
$$

$$
= \int_{t-d(t)}^{t} w^{\mathrm{T}}(s) R_1 w(s) ds + \int_{t-d(t)}^{t} \chi^{\mathrm{T}}(t) N \chi(t) ds
$$

$$
+ 2\int_{t-d(t)}^{t} w^{\mathrm{T}}(s) (M - [0 \quad K^{\mathrm{T}}]P) \chi(t) ds
$$

$$
= \int_{t-d(t)}^{t} w^{\mathrm{T}}(s) R_1 w(s) ds + d(t) \chi^{\mathrm{T}}(t) N \chi(t)
$$

$$
+ 2\int_{t-d(t)}^{t} \dot{y}^{\mathrm{T}}(s) (M - [0 \quad K^{\mathrm{T}}] P \chi(t) ds
$$

$$
\le \int_{t-d(t)}^{t} w^{\mathrm{T}}(s) R_1 w(s) ds + 2y^{\mathrm{T}}(t)(M - [0 K^{\mathrm{T}}] P)\chi(t)
$$

$$
-2y^{\mathrm{T}}(t-d(t))(M-[0K^{\mathrm{T}}]P)\chi(t) + d_M \chi^{\mathrm{T}}(t) N \chi(t) \quad (21)
$$

藉由 Jensen 積分不等式方法[5]，可得

$$
-\int_{t-d_M}^{t-d(t)} w^{\mathrm{T}}(s) R_1 w(s) ds
$$

$$
\le -\frac{1}{d_M - d_m}\left[\int_{t-d_M}^{t-d(t)} w(s) ds\right]^{\mathrm{T}} R_1 \left[\int_{t-d_M}^{t-d(t)} w(s) ds\right]
$$

$$
= -\frac{1}{d_M - d_m}[\, y(t-d(t)) - y(t-d_M)]^{\mathrm{T}} R_1 \times [\, y(t-d(t)) - y(t-d_M)] \quad (22a)
$$

$$
-\int_{t-\alpha d_M}^{t} w^{\mathrm{T}}(s) R_3 w(s) ds
$$

$$
\le -\frac{1}{\alpha d_M}\left[\int_{t-\alpha d_M}^{t} w(s) ds\right]^{\mathrm{T}} R_3 \left[\int_{t-\alpha d_M}^{t} w(s) ds\right]
$$

$$
= -\frac{1}{\alpha d_M}[\, y(t) - y(t-\alpha d_M)]^{\mathrm{T}} R_3 [\, y(t) - y(t-\alpha d_M)] \quad (22b)
$$

引用補助定理三，可得

$$
-\int_{-d_M}^{0}\int_{t+\theta}^{t} d_M^2 w^{\mathrm{T}}(s) R_2 w(s) ds d\theta
$$

$$
\le -\frac{2}{d_M^2}\left(\int_{-d_M}^{0}\int_{t+\theta}^{t} w(s) ds d\theta\right)^{\mathrm{T}} R_2 \times \left(\int_{-d_M}^{0}\int_{t+\theta}^{t} w(s) ds d\theta\right)
$$

$$
= -\frac{2}{d_M^2}\left(d_M y(t) - \int_{t-d(t)}^{t} y(s) ds - \int_{t-d_M}^{t-d(t)} y(s) ds\right)^{\mathrm{T}} R_2
$$

$$
\times \left(d_M y(t) - \int_{t-d(t)}^{t} y(s) ds - \int_{t-d_M}^{t-d(t)} y(s) ds\right) \quad (23)
$$

將(19)-(23)式代入(18)式，可得

$$
\dot{V}(t) \le \sum_{i=1}^{N} S_i(t)\, z^{\mathrm{T}}(t)\, \Gamma\, z(t) \quad (24)
$$

其中

$$
z^{\mathrm{T}}(t) = [\chi^{\mathrm{T}}(t)\; y^{\mathrm{T}}(t-d(t))\; y^{\mathrm{T}}(t-\alpha d_M)\; y^{\mathrm{T}}(t-d_M)\; (\int_{t-d(t)}^{t} y(s)ds)^{\mathrm{T}}\; (\int_{t-d_M}^{t-d(t)} y(s)ds)^{\mathrm{T}}] \quad (25a)
$$

$$
\Gamma = \begin{bmatrix} Y & -M^{\mathrm{T}}-H^{\mathrm{T}} & \Phi & 0 & \Pi & \Pi \\ -M-H & Z & 0 & \Psi & 0 & S_2 \\ \Phi^{\mathrm{T}} & 0 & -Q_3-X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi & 0 & -Q_2-\Psi & 0 & 0 \\ \Pi^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{d_M^2}R_2 & -\frac{2}{d_M^2}R_2 \\ \Pi^{\mathrm{T}} & S_2 & 0 & 0 & -\frac{2}{d_M^2}R_2 & -\frac{2}{d_M^2}R_2 \end{bmatrix} \quad (25b)
$$

$$
Y = P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & I \\ K+(\delta-1)I & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ K+(\delta-1)I & -I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} P
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_1+Q_2+Q_3+\beta_1 CC - 2R_2 + 2J \\ \beta_3 \lambda_M[(E_i^A)^{\mathrm{T}} E_i^A] CC - \frac{1}{\alpha d_M} R_3 \end{pmatrix} & S_1 \\ S_1 & d_M(R_1+\alpha R_3) + \frac{1}{2} d_M^2 R_2 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} M - [0 \quad K^{\mathrm{T}}]P \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M - [0 \quad K^{\mathrm{T}}]P \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + d_M N
$$

$$
+ P^{\mathrm{T}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ A_i \end{bmatrix} W_1^{-1}[0\; A_i^{\mathrm{T}}] + \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix} W_2^{-1}[0\; B_i^{\mathrm{T}}] + (\beta_3^{-1} + \beta_4^{-1})\begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix}[0\; D^{\mathrm{T}}]\right) P \quad (25c)
$$

$$
Z = -(1-\rho) Q_1 + \beta_2\, e^{2\delta d_M} CC + \beta_4 \lambda_M [(E_i^B)^{\mathrm{T}} E_i^B] CC - \frac{1}{d_M - d_m} R_1 \quad (25d)
$$

$$
H = [(1-\rho)J \;\; 0]^{\mathrm{T}} \;, \; \Phi = [\frac{1}{\alpha d_M} R_3\; 0]^{\mathrm{T}}, X = \frac{1}{\alpha d_M} R_3 \quad (25e)
$$

$$
\Psi = \frac{1}{d_M - d_m} R_1, \Pi = [\frac{2}{d_M} R_2 + S_2 \quad J]^{\mathrm{T}} \quad (25f)
$$

由上述分析得知，若 $\Gamma < 0$ 成立，則 $\dot{V}(t) < 0$ 。再者，根據 Schur complement 觀念[6]，若(9b)式成立，則 $\Gamma < 0$ 。因此，可確定系統(11)式均為漸近穩定。同時，也保證區間延遲切換類神經網路系統(1)式為指數穩定。故得證。

3. 例題說明

例題一

考慮區間延遲切換類神經網路系統如下

$$
\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} S_i(t)\{-x(t) + [A_i + \Delta A_i(t)] f(x(t)) + [B_i + \Delta B_i(t)] f(x(t-d(t)))\} \quad (26)
$$

其中

$$x(t)=[x_1(t),\ \ x_2(t)]^{\mathrm T}$$
$$\Delta A_1(t)=DF(t)E_1^A,\ \Delta B_1(t)=DF(t)E_1^B$$
$$\Delta A_2(t)=DF(t)E_2^A,\ \Delta B_2(t)=DF(t)E_2^B$$
$$f(x(t))=[f_1(x_1(t)),\ \ f_2(x_2(t))]^{\mathrm T}$$
$$|f_1(x_1(t))|\le|x_1(t)|,\ |f_2(x_2(t))|\le 0.5|x_2(t)|$$
$$A_1=\begin{bmatrix}-0.3 & 0.25\\ 0.25 & -0.3\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}0.25 & 0.35\\ 0.15 & 0.55\end{bmatrix}$$
$$A_2=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.15\\ 0.15 & -0.2\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.2\end{bmatrix}$$
$$D=\begin{bmatrix}0.25 & 0\\ 0 & 0.25\end{bmatrix},\ F(t)=\begin{bmatrix}\sin(x_1(t)) & 0\\ 0 & \sin(x_2(t))\end{bmatrix}$$
$$E_1^A=\begin{bmatrix}1.5 & 0\\ 0 & -1.5\end{bmatrix},\ E_1^B=\begin{bmatrix}-0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}$$
$$E_2^A=\begin{bmatrix}-1.5 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix},\ E_2^B=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & -0.1\end{bmatrix}$$

本問題是系統(26)式仍保持指數穩定情況下，能容許多大之時間延遲量$d(t)$。

解

首先，令$d_m\le d(t)\le d_M$及$\dot d(t)\le\rho$，並選取$d_m=0$及不同ρ之大小及指數收斂率$\delta=0.25$；再者，引用本文之定理一及MATLAB LMI Toolbox軟體，求得如表1所示的最大時間延遲量d_M時，則保證系統(26)式為指數穩定。

利用文獻[7,8]之方法，求得如表1所示的最大時間延遲量d_M時，則保證系統(26)式為指數穩定。因此，本文之定理一的指數穩定條件明顯優於文獻[7,8]的指數穩定條件。

表 1　本文與文獻[7,8]之結果比較

ρ	最大時間延遲量d_M(文獻[7]之方法)	最大時間延遲量d_M(文獻[8]之方法)	最大時間延遲量d_M(本文之方法)
0.25	無法求得	4.7126	9.5722
0.45	無法求得	3.2935	8.8236
0.75	無法求得	2.0842	7.3921
0.99	無法求得	0.9371	5.2893

例題二

考慮具有單一模式之延遲類神經網路系統如下

$$\dot x(t)=-x(t)+Af(x(t))+Bf(x(t-d(t)))\quad(27)$$

其中

$$x(t)=[x_1(t),\ \ x_2(t)]^{\mathrm T}$$
$$f(x(t))=[f_1(x_1(t)),\ \ f_2(x_2(t))]^{\mathrm T}$$
$$|f_j(x_i(t))|\le|x_j(t)|,\ \ j=1,2$$
$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0.5\\ 0.5 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-0.5 & 1\\ 1 & -0.5\end{bmatrix}$$

本問題是系統(27)式仍保持漸近或指數穩定情況下，能容許多大之時間延遲量$d(t)$。

解

本問題可得兩種結果，其說明如下：

(一)指數穩定結果比較：

首先，令$d_m\le d(t)\le d_M$及$\dot d(t)\le\rho$，並選取$d_m=0$，$\rho=0.5$及不同指數收斂率$\delta>0$；再者，引用本文之定理一及文獻[9,10,11]之方法，且應用MATLAB LMI Toolbox軟體，分別求得如表2所示的最大時間延遲量d_M時，則保證系統(27)式為指數穩定。

(二)漸近穩定結果比較：

首先，令$d_m\le d(t)\le d_M$及$\dot d(t)\le\rho$，並選取$d_m=0$，$\rho=0.2$及指數收斂率$\delta=0$；再者，引用本文之定理一及文獻[9,10,11,12,13]之方法，且應用MATLAB LMI Toolbox軟體，分別求得如表3所示的最大時間延遲量d_M時，則保證系統(27)式為漸近穩定。

由表2及表3之結果得知，本文之定理一的穩定條件明顯優於文獻[9,10,11,12,13]的穩定條件。

表 2　本文與文獻[9,10,11]之指數穩定結果比較

指數收斂率δ	最大時間延遲量d_M(文獻[9]之方法)	最大時間延遲量d_M(文獻[10]之方法)	最大時間延遲量d_M(文獻[11]之方法)	最大時間延遲量d_M(本文之方法)
0.15	4.1627	5.5117	6.2231	9.9357
0.35	3.3252	4.2125	5.1195	8.8165
0.65	2.1193	2.3821	3.8229	7.6382
0.85	1.0385	1.6792	2.9726	6.9573
0.95	0.5372	0.7938	1.8537	5.5639

表 3　本文與文獻[9,10,11,12,13]之漸近穩定結果比較

方法	文獻[9]	文獻[10]	文獻[11]	文獻[12]	文獻[13]	本文

最大時間延遲量 d_M	1.1576	3.8293	5.1672	7.3509	8.7158	9.9816

4. 結論

本文乃提出分段延遲積分方法應用於區間延遲切換類神經網路之指數收斂率估測問題分析，而本方法的優點可歸納如下：

(一)引用原類神經網路之奇異模型轉換技巧，可使等效類神經網路之穩定度易於分析。

(二)選取具有三重積分項目之特殊型 Lyapunov-Krasovskii 泛函數，可獲得區間延遲切換類神經網路穩定的指數收斂率或時間延遲量之最大估測值。

(三)藉由 Schur complement 定理與線性矩陣不等式方法，推導出非保守之時延導數相關指數穩定準則，且便於 MATLAB 軟體模擬分析。

(四)改善現有文獻之時延導數相關指數穩定條件，未來將進一步應用於具有混合時變延遲與參數擾動之切換型中立隨機類神經網路的漸近與指數穩定度測試方面。

5. 參考文獻

[1] Y. Y. Cao, Y. X. Sun, and C. Cheng, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delays, " *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 43, pp. 1608-1612, 1998.

[2] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon, and Y. S. Lee, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems," *Int. J. Control*, vol. 74, pp. 1447-1455, 2001.

[3] J. Sun, G. P. Liu, and J. Chen, "Delay-dependent stability and stabilization of neutral time-delay systems, " *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 19, pp.364-1375, 2009.

[4] E. Fridman, and U. Shaked, "A descriptor system appreach to H∞ control of linear time-delay systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 47, pp. 253-270, 2002.

[5] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems.* Boston, MA: Birkhauser, 2003.

[6] S. Boyd, L. El. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inqualities in system and control theory*, SIAM, Philadephia, 1994.

[7] H. Huang, Y. Qu, and H. X. Li, "Robust stability analysis of switched Hopfield neural networks with time-varying delay under uncertainty," *Phys. Lett. A*, vol. 345, pp. 345-354, 2005.

[8] H. Zhang, Z. Liu, and G. B. Huang, "Novel delay-dependent robust stability analysis for switched neutral-type neural networks with time-varying delays via sc technique, " *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.*, vol. 40, pp. 1480-1491, 2010.

[9] M. Wu, F. Liu, P. Shi Y. He, and R. Yokoyama," Exponential stability analysis for neural networks with time-varying delay," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.*, vol. 38, pp.1152-1156, 2008.

[10] C. D. Zheng, H. Zhang, and Z. Wang, " New delay-dependent global exponential stability criterion for cellular-type neural networks with time-varying delays," *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs*, vol. 56, pp.250-254, 2009.

[11] C. -C. Hua, X. Yang, J. Yan, and X. -P. Guan, "New exponential stability criteria for neural networks with time-varying delay," *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs*, vol. 58, pp. 931-935, 2011.

[12] H. B. Zeng, Y. He, M. Wu, and C. F. Zhang, "Complete delay-decomposing approach to asymptotic stability for neural networks with time-varying delays, " *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 22, pp. 806-812, 2011.

[13] C. Hua, X. Yang, J. Yan, X. Guan, "New stability criteria for neural networks with time-varying delay," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, pp.5035-5042, 2012.

Integral Inequality Approach to Exponential Stability Study for Neural Networks with interval Delays

Ming-Sheng Yang[1]
[1]Department of Electrical Engineering
Chienkuo Technology University
Changhua, 500, Taiwan, R.O.C.
E-mail:yms@ctu.edu.tw

Abstract

This paper studies the problem of estimation of robust exponential convergence rate for neural networks with interval delays. By employing segmental delay integral approach, a special Lyapunov-Krasovskii functional with triple integral item and integral inequality technique, a new delay-derivative-dependent criterion is derived in order to guarantee the robust exponential stability of the above neural networks. The proposed criterion is expressed in terms of the linear matrix inequality, which can be efficiently solved by using MATLAB software. Two numerical examples are provided to show that the new criterion obtained in this paper is less conservative than those in the literature.

Keywords: Interval-delay neural networks,segmental delay integral approach, integral inequality, delay-derivative-dependent criterion.